Marţi, 16 iulie 2019

Problema 1. Fie $\mathbb{Z}$ mulţimea numerelor întregi. Determinaţi toate funcţiile $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ astfel încât

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)),$$

pentru orice numere întregi a şi b.

Problema 2. În triunghiul ABC, punctul A_1 se află pe latura BC şi punctul B_1 se află pe latura AC. Fie P un punct pe segmentul AA_1 şi fie Q un punct pe segmentul BB_1, astfel încât dreapta PQ este paralelă cu dreapta AB. Fie P_1 un punct pe dreapta PB_1, astfel încât B_1 se află strict între P şi P_1, iar $\angle PP_1C = \angle BAC$. Analog, fie Q_1 un punct pe dreapta QA_1, astfel încât A_1 se află strict între Q şi Q_1, iar $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Demonstraţi că punctele P, Q, P_1, şi Q_1 sunt conciclice.

Problema 3. O reţea de socializare are 2019 utilizatori, unele perechi fiind prieteni. Dacă utilizatorul A este prieten cu utilizatorul B, atunci utilizatorul B este de asemenea prieten cu utilizatorul A. Evenimente de următorul tip se produc pe rând:

> Se aleg trei utilizatori A, B, şi C astfel încât A este prieten şi cu B şi cu C, dar B şi C nu sunt prieteni; apoi B şi C devin acum prieteni, dar A nu mai este acum prieten nici cu B şi nici cu C. Toate celelalte stări de prietenie rămân neschimbate.

Iniţial, 1010 utilizatori au fiecare câte 1009 prieteni, şi 1009 utilizatori au fiecare câte 1010 prieteni. Demonstraţi că există o secvenţă de astfel de evenimente, după care fiecare utilizator este prieten cu cel mult un alt utilizator.

Miercuri, 17 iulie 2019

Problema 4. Găsiţi toate perechile (k, n) de numere naturale nenule astfel încât

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problema 5. Banca din Bath a emis monede care au litera H pe o faţă şi litera T pe cealaltă faţă. Ana a aranjat n astfel de monede de la stânga la dreapta pe un rând. Ana repetă următoarea operaţie: dacă există exact $k > 0$ monede care au pe faţa de sus litera H, atunci ea întoarce pe partea celalaltă moneda de pe poziţia k, numărată de la stânga; altfel, toate monedele au litera T pe faţa de sus şi Ana se opreşte. De exemplu, dacă $n = 3$ şi procesul începe cu configuraţia THT, atunci secvenţa de operaţii va fi $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, şi Ana se opreşte după trei operaţii.

(a) Arătaţi că, pentru orice configuraţie iniţială, Ana se opreşte după un număr finit de operaţii.

(b) Pentru fiecare configuraţie iniţială C, fie $L(C)$ numărul de operaţii după care Ana se opreşte. De exemplu, $L(THT) = 3$ şi $L(TTT) = 0$. Determinaţi media aritmetică a valorilor $L(C)$, când C parcurge toate cele 2^n configuraţii iniţiale posibile.

Problema 6. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ascuţitunghic ABC pentru care $AB \neq AC$. Cercul ω înscris în triunghiul ABC este tangent la laturile BC, CA, şi AB în punctele D, E, şi respectiv F. Dreapta care trece prin D şi este perpendiculară pe dreapta EF intersectează din nou cercul ω în punctul R. Dreapta AR intersectează din nou cercul ω în punctul P. Cercurile circumscrise triunghiurilor PCE şi PBF se intersectează din nou în punctul Q.

Demonstraţi că dreptele DI şi PQ se intersectează pe dreapta care trece prin A şi este perpendiculară pe AI.

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte