Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu proprietatea că

$$(f''(x)-f(x))\cdot\operatorname{tg}(x)+2\cdot f'(x)\geq 1\,,\qquad \text{pentru orice } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Arătați că

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot\sin(x)\,dx\geq\pi-2\,.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu elementul neutru e, iar H și K două subgrupuri proprii ale lui G, cu proprietatea că $H\cap K=\{e\}$ și că $(G\setminus(H\cup K))\cup\{e\}$ este parte stabilă în raport cu operația din G. Arătați că $x^2=e$ pentru orice $x\in G$.

Problema 3. Fie $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcție continuă.
a) Arătați că

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)\,dx=f(0)\,.$$

b) Dacă $f(0)=0$ și f este derivabilă la dreapta în 0, arătați că limitele

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^1\frac{f(x)}{x}\,dx\qquad\text{și}\qquad\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\int_0^1 f(x^n)\,dx\right)$$

există, sunt finite și egale.

Problema 4. Pe mulțimea $A=[0,\infty)$ a numerelor reale nenegative se consideră trei funcții $f,g,h:A\longrightarrow A$ și operația binară $*:A\times A\longrightarrow A$, definită prin

$$x*y=f(x)+g(y)+h(x)\cdot|x-y|\,,\qquad\text{pentru orice } x,y\geq 0.$$

Dacă $(A,*)$ este un monoid comutativ,
a) arătați că funcția h este continuă pe A;
b) determinați funcțiile f,g,h.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.