Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a IX –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1

a) Să se determine primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25} = 950$ și $2a_3 - a_7 = -4$.

b) Fie șirul de numere reale $(c_n)_{n\geq 1}$, definit prin $c_1 = 1,\ c_{n+1} - 2c_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$, definit prin $b_n = 1 + c_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, este o progresie geometrică.

Subiectul 2

În triunghiul ABC se consideră punctul E mijlocul segmentului $[AB]$, F mijlocul medianei din C, $D \in (BC)$ astfel încât $BD = 2 \cdot DC$ și $P \in (AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AC}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{BA}$.

b) Să se arate că punctele A, F și D sunt coliniare.

c) Să se calculeze raportul $\frac{AF}{AD}$.

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$.

a) Să se determine soluțiile reale ale ecuației: $\left(f(x)\right)^2 + 2 \cdot f(x) - 3 = 0$.

b) Determinați funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g = \underbrace{f \circ f \circ f \ldots \circ f}_{f \text{ este de } n \text{ ori}}$, unde $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, iar " $\circ$ " reprezintă compunerea funcțiilor.

c) Să se calculeze: $f(1) \cdot f(2) + f(2) \cdot f(3) + \cdots + f(99) \cdot f(100) + f(100) \cdot f(101)$.

Subiectul 4.

Trei motocicliști, A, B și C, parcurg aceeași distanță, traiectoria lor fiind o linie dreaptă. Motociclistul B parcurge distanța cu viteza de $60 km/h$, iar motociclistul C cu viteza de $40 km/h$. Știind că B merge cu 2 ore mai puțin decât A, iar C merge cu 2 ore mai mult decât A, determinați viteza motociclistului A. Legea mișcării este $v = \frac{d}{t}$, unde v este viteza$[km/h]$, d este distanța$[km]$, iar t este timpul$[h]$.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Inspectoratul Școlar Județean Iași

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a X –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+x$.

a) Demonstrați că $n=f(3\log_2 5)-f(\log_2 500)$ este un număr întreg.

b) Să se arate ca funcția f este injectivă.

c) Rezolvați în mulțimea $(0,\pi)$ ecuația $2^{sin^2x}-2^{cos^2x}=cos2x$.

Subiectul 2

Fie ecuația $(1+i)x^2-2mx+m-i=0, m\in\mathbb{R}$.

a) Pentru m = 1 rezolvați ecuația în mulțimea numerelor complexe.

b) Pentru $m=-1$, arătați că numărul $\frac{1}{x_1^2+x_1-2}+\frac{1}{x_2^2+x_2-2}$ este real, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației.

Determinați numerele reale m pentru care ecuația are o rădăcină reală.

Subiectul 3.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{7+x}=2$.

b) Rezolvați in mulțimea numerelor reale ecuația

$$4(x-3)^{\log_6(x^2+11)}+2(x^2+11)^{\log_6(x-3)}=6(x-3)^2.$$

c) Determinați domeniul maxim de definiție al funcției

$$f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{0,01-x}(lg^2x^2+12lgx+8)$$

Subiectul 4.

Andrei și Bogdan locuiesc pe aceeași stradă (liniară) în casele A și B de afixe $z_A=1-i$ și $z_B=-1+i$.

a) Determinați distanța dintre cele două case.

b) Cezar și Dan vor să-și construiască câte o casă C și D de o parte și de alta a străzii AB astfel încât cele patru case să fie vârfurile unui romb cu latura egală cu distanța dintre casele lui Andrei și Bogdan. Determinați afixele punctelor C și D.

c) Determinați numărul real m știind că Marian are un magazin M de afix $z_M=5+mi$ pe strada pe care locuiesc Andrei și Bogdan astfel încât casa lui Andrei să fie între casa lui Bogdan și magazin (M-A-B coliniare).

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a XI –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_a = I_2 + aA$, unde a este număr real.

a) Arătați că $5M_3 - 4M_{-1} = M_{19}$.

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea M_a este inversabilă.

c) Determinați valorile reale ale lui a pentru care $M_a \cdot M_a = M_0$.

Subiectul 2

Se consideră funcțiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ și $g(x) = x^3 + x^2 + 2x$.

a) Arătați că numărul $C = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+f(x)} - \sqrt{f(x)}}{x}$ este rațional.

b) Să se determine abscisa pozitivă a punctului de pe graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)$, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta d de ecuaţie $y = 5x + 1$.

c) Demonstrați că ecuația $g(x) = f(x) + 3$ are o soluție reală unică aflată în intervalul $(1; 2)$.

Subiectul 3.

Preţul de vânzare (măsurat în bitcoin) al unor acţiuni a fost urmărit începând de la momentul 1 (când au fost plasate pe piaţă la bursa de la New York) până la momentul T (când s-au epuizat). Preţul maxim de vânzare a fost atins la momentul t_0. Preţul acţiunilor a înregistrat o variaţie dată de funcţia

$P: [1; T] \to (0{,}3], P(t) = \begin{cases} 2^t - 1\,, 1 \le t \le t_0 \\ 4 - \sqrt{t-a}, t_0 < t \le T \end{cases}$ unde $a \in \mathbb{R}$, t este timpul de tranzacţionare măsurat în ore, iar t_0 este momentul la care prețul de vânzare atinge pragul maxim de 3 bitcoin.

a) Găsiţi t_0.

b) Să se găsească $a \in \mathbb{R}$ știind că în preţul tranzacţionării acţiunilor nu s-a înregistrat nici un moment de discontinuitate.

c) Pentru $a = 1$, aflaţi T știind că prețul ultimei acțiuni a fost egal cu prețul de la momentul plasării pe piață.

Subiectul 4.

O firmă de construcții realizează planul unei autostrăzi între localitățile A și B cu coordonatele (20, 30), respectiv (60,110) unde 1 u.m. pe schița cadastrală reprezintă 1 km real. Autostrada va asigura drumul cel mai scurt între cele două localități și va traversa o zonă cu pădure.

a) Să demonstreze că localitatea M , cu coordonatele (30, 50) se află pe traseul de construcție al viitoarei autostrăzi.

b) Știind că zona împădurită este situată de o parte și de alta a autostrăzii și este delimitată de punctele M , N (a, 70) și P (50, 60) pe schiţa cadastrală, aflați parametrul real a știind că suprafaţa pădurii este de 250 km^2.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a XII –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1

Fie $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{X(a) = I_2 + aA, \text{unde } a \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

a) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 2ab),\ \forall X(a), X(b) \in G$.

b) Admitem că $(G,\cdot)$ este grup abelian. Aflați numărul real m astfel încât funcția $f: (\mathbb{R}^*,\cdot) \to (G,\cdot), f(x) = X(\frac{x+m}{2})$ este izomorfism de grupuri.

c) Câte perechi de numere întregi de forma (a,b) există, astfel încât $X(a)X(b) = X(5)$?

Subiectul 2

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definesc legile de compoziție $x \circ y = x + y + \hat{3}$ și $x * y = xy + \hat{3}x + \hat{3}y$.

a) Să se demonstreze distributivitatea legii de compoziție “$*$” față de legea de compoziție “$\circ$”.

b) Să se verifice dacă tripletul $(\mathbb{Z}_6,\circ,*)$ este inel comutativ.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x * \hat{2} = \hat{2}y + \hat{3} \\ x \circ y = \hat{5} \end{cases}$.

Subiectul 3

Se consideră $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

c) Să se demonstreze că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 4

În urma unui studiu referitor la memoria elevilor, s-a constatat că numărul de cuvinte noi din vocabularul limbii franceze memorate de un elev în t minute de la începerea unei ore de clasă este dat de $[M(t)]$, partea întreagă a lui $M(t)$, unde $M(t) = |f(t)|$, iar $f: [0,50] \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă care verifică pentru orice $t \in [0,50]$ relația $f'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}16t$.

a) Aflați funcția f și numărul de cuvinte memorate de un elev în primele 10 minute ale unei ore de limba franceză.

b) Demonstrați că numărul de cuvinte noi memorate de un elev crește pe parcursul unei ore de clasă și determinați câte cuvinte noi memorează un elev în ultimele 20 minute dintr-o oră de clasă, cu durata de 50 minute.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a IX –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1

a) Să se determine primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă:
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{25}=950$ *și* $2a_3-a_7=-4$.

b) Fie șirul de numere reale $(c_n)_{n\geq 1}$, definit prin $c_1=1$, $c_{n+1}-2c_n=1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$, definit prin $b_n=1+c_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ este o progresie geometrică.

SOLUȚIE:

a) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{25}=950 \Leftrightarrow a_1+(a_1+r)+(a_1+2r)+\cdots+(a_1+24r)=950 \Leftrightarrow$

$25a_1+r(1+2+\cdots+24)=950 \Leftrightarrow 25a_1+300r=950 \Leftrightarrow a_1+12r=38$ 1p

$2a_3-a_7=-4 \Leftrightarrow a_1-2r=-4$ 1p

$\begin{cases} a_1+12r=38 \\ a_1-2r=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=2 \\ r=3 \end{cases}$ 2p

b) $c_1=1,\ b_1=1+c_1=1+1=2,\ c_{n+1}-2c_n=1 \Rightarrow c_{n+1}=2c_n+1 \Rightarrow c_n>0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1+2c_n+1}{1+c_n}=\frac{2(1+c_n)}{1+c_n}=2$ 2p

$(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică cu $b_1=2$ și rația $q=2$. 1p

Subiectul 2

În triunghiul ABC se consideră punctul E mijlocul segmentului $[AB]$, F mijlocul medianei din C, $D\in(BC)$ astfel încât $BD=2\cdot DC$ și $P\in(AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{AC}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{4}{7}\cdot\overrightarrow{BA}$.

b) Să se arate că punctele A, F și D sunt coliniare.

c) Să se calculeze raportul $\frac{AF}{AD}$.

SOLUȚIE:

a) $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{AC}$. 1p

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$. 1p

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}\cdot\left(-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{BA}-\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{4}{7}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{4}{7}\cdot\overrightarrow{BA}$ 1p

b) În triunghiul ABC punctul E este mijlocul segmentului $[AB]$, de unde rezultă că $[CE]$ este mediana din C și F este mijlocul segmentului $[CE]$.

În triunghiul AEC se aplică teorema medianei și se obține:

$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}\right)$. 1p

$D\in(BC), BD=2\cdot DC \Rightarrow \overrightarrow{BD}=2\cdot\overrightarrow{DC}$. Rezultă că punctul D împarte segmentul $[BC]$ în raportul $k=2$.

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{1+2}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{1+2}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}\right)$. 1p

$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AF}$ și $\overrightarrow{AD}$ sunt coliniari $\Rightarrow A, F, D$ sunt puncte coliniare. 1p

c) $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AD} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AF}\right|=\left|\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AD}\right| \Rightarrow AF=\frac{3}{4}\cdot AD \Rightarrow \frac{AF}{AD}=\frac{3}{4}$. 1p

Subiectul 3

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1$.

a) *Să se determine soluțiile reale ale ecuației:* $\left(f(x)\right)^2+2\cdot f(x)-3=0$.

b) *Determinați funcția* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g=\underbrace{f\circ f\circ f\ldots\circ f}_{f\ este\ de\ n\ ori}$, *unde* $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, *iar* " $\circ$ " *reprezintă compunerea funcțiilor.*

c) *Să se calculeze:* $f(1)\cdot f(2)+f(2)\cdot f(3)+\cdots+f(99)\cdot f(100)+\ f(100)\cdot f(101)$.

SOLUȚIE:

a) $\left(f(x)\right)^2+2\cdot f(x)-3=0\Leftrightarrow(2x-1)^2+2\cdot(2x-1)-3=0$……………………………………1p

În urma calculului se obține: $x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ ……………………………………………1p

b) $(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=2(2x-1)-1=2^2x-2-1=2^2x-2^2+1$

$(f\circ f\circ f)(x)=2^3x-2^3+1$ ……………………………………………………………………1p

$P(n)$: $(\underbrace{f\circ f\circ f\ldots\circ f}_{f\ este\ de\ n\ ori})(x)=2^nx-2^n+1, n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ ……………………………………1p

I. $P(2)$ este adevărată.

II.Presupunem adevărată $P(k)$: $(\underbrace{f\circ f\circ f\ldots\circ f}_{f\ este\ de\ k\ ori})(x)=2^kx-2^k+1,\ k\in\mathbb{N},\ k\geq 2$.

Demonstrăm că este adevărată $P(k+1)$: $(\underbrace{f\circ f\circ f\ldots\circ f}_{f\ este\ de\ k+1\ ori})(x)=2^{k+1}x-2^{k+1}+1$.

$(\underbrace{f\circ f\circ f\ldots\circ f}_{f\ este\ de\ k+1\ ori})(x)=f((\underbrace{f\circ f\circ f\ldots\circ f}_{f\ este\ de\ k\ ori})(x))=2(2^kx-2^k+1)-1=2^{k+1}x-2^{k+1}+2-1$

$=2^{k+1}x-2^{k+1}+1\Longrightarrow P(k+1)$ este adevărată .

Din I. și II. $\Rightarrow P(n)$ este adevărată $\forall\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

$g(x)=(\underbrace{f\circ f\circ f\ldots\circ f}_{f\ este\ de\ n\ ori})(x)=2^nx-2^n+1,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ ……………………………… 1p

c) $f(k)\cdot f(k+1)=(2k-1)(2k+1)=4k^2-1$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ……………………………………………………………………1p

$f(1)\cdot f(2)+f(2)\cdot f(3)+\cdots+f(n)\cdot f(n+1)=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-1)=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n=$

$=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}\Rightarrow\ f(1)\cdot f(2)+f(2)\cdot f(3)+\cdots+f(99)\cdot f(100)+f(100)\cdot f(101)=$1353300…….1p

Subiectul 4.

Trei motocicliști, A, B și C, parcurg aceeași distanță, traiectoria lor fiind o linie dreaptă. Motociclistul B parcurge distanța cu viteza de $60km/h$, *iar motociclistul C cu viteza de* $40km/h$. *Știind că B merge cu 2 ore mai puțin decât A, iar C merge cu 2 ore mai mult decât A, determinați viteza motociclistului A. Legea mișcării este* $v=\frac{d}{t}$, *unde* v *este viteza*$[km/h]$, *d este distanța*$[km]$, *iar t este timpul*$[h]$.

SOLUȚIE:

Fie d distanța parcursă de motocicliști exprimată în km, t numărul de ore în care motociclistul A parcurge distanța d, iar v_A, v_B, v_C reprezintă vitezele celor trei motocicliști.

$d = v_A \cdot t,\ d = v_B \cdot (t-2),\ d = v_C \cdot (t+2)$ 3p

$v_B = 60\ [km/h],\ v_C = 40[km/h]\ \Rightarrow 60 \cdot (t-2) = 40 \cdot (t+2)$. 1p

$60t - 120 = 40t + 80 \Rightarrow 20t = 200 \Rightarrow t = 10\ [h]$. 1p

$d = v_B \cdot (t-2) = 60 \cdot 8 = 480 \Rightarrow d = 480\ [km]$. 1p

$d = v_A \cdot t \Rightarrow 480 = v_A \cdot 10 \Rightarrow v_A = 48\ [km/h]$. 1p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a X –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+x$.

a) Demonstrați că $n=f(3\,log_2 5)-f(log_2 500)$ *este un număr întreg.*

b) Să se arate ca funcția f este injectivă.

***c)** Rezolvați în mulțimea* $(0,\pi)$ *ecuația* $2^{sin^2x}-2^{cos^2x}=cos2x$.

SOLUȚIE:

a) Calculează $f(3\log_2 5)=125+\log_2 125$ și $f(\log_2 500)=500+\log_2 500$........................1p

Obține $n=-375+\log_2\frac{1}{4}=-377$ care este număr intreg..1p

b) Funcțiile $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=2^x$ și $h(x)=x$ sunt strict crescătoare....................................1p

Funcția f este strict crescătoare (sumă de funcții strict crescătoare) de unde rezultă că f este funcție injectivă...1p

c) Obține $2^{sin^2x}+sin^2x=2^{cos^2x}+cos^2x$...1p

Din f injectivă deduce că $sin^2x=cos^2x$...1p

Folosind $sin^2x+cos^2x=1$, obține $sinx=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cum $x\in(0,\pi)$, găsește soluția $x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$...1p

SUBIECTUL 2

Fie ecuația $(1+i)x^2-2mx+m-i=0, m\in\mathbb{R}$.

a) Pentru m=1 rezolvați ecuația în mulțimea numerelor complexe.

b) *Pentru* $m=-1$, *arătați că numărul* $\frac{1}{x_1^2+x_1-2}+\frac{1}{x_2^2+x_2-2}$ *este real, unde* x_1 și x_2 *sunt rădăcinile ecuației.*

c) Determinați numerele reale m pentru care ecuația are o rădăcină reală.

SOLUȚIE:

a) Obține ecuația $(1+i)x^2-2x+1-i=0$ cu soluțiile $x_1=1$ și $x_2=-i$.............................1p

b) $(1+i)x^2+2x-1-i=0 \Leftrightarrow x^2+(1-i)x-1=0$ (prin înmulțire cu $1-i$), cu rădăcinile x_1și x_2 care au $S=-1+i$ și $P=-1$...1p

Deduce că $x_1^2+(1-i)x_1-1=0$ și $x_2^2+(1-i)x_2-1=0$ și obține $x_1^2+x_1-2=-1+ix_1$ și $x_2^2+x_2-2=-1+ix_2$..1p

Finalizare $\frac{1}{x_1^2+x_1-2}+\frac{1}{x_2^2+x_2-2}=\frac{iS-2}{-P-iS+1}=-1\in\mathbb{R}$...1p

c) Dacă α este soluția reală a ecuației rezultă că:

$(1+i)\alpha^2 - 2m\alpha + m - i = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2m\alpha + m + i(\alpha^2 - 1) = 0, cu\ m, \alpha \in \mathbb{R}$............1p

Deduce că $\alpha^2 - 2m\alpha + m = 0$ și $\alpha^2 - 1 = 0$ de unde obține $m \in \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$..........................2p

SUBIECTUL 3

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{7+x} = 2.$

b) Rezolvați in mulțimea numerelor reale ecuația

$$4(x-3)^{log_6(x^2+11)} + 2(x^2+11)^{log_6(x-3)} = 6(x-3)^2.$$

c) Determinați domeniul maxim de definiție al funcției

$$f: D \to \mathbb{R}, f(x) = log_{0,01-x}(lg^2x^2 + 12lgx + 8)$$

SOLUȚIE:

a) Notează $a = \sqrt[3]{1-x}, b = \sqrt{7+x}, x \in [-7, \infty)$ și $a + b = 2, a^3 + b^2 = 8$ de unde obține

$a^3 + a^2 - 4a - 4 = 0$..1p

Determină $a \in \{-2, -1{,}2\}$ *de unde obține* $x \in \{-7{,}2{,}9\}$ *care convin*................................1p

b) Deoarece $(x^2+11)^{\log_6(x-3)} = (x-3)^{\log_6(x^2+11)}$ *cu* $x \in (3, \infty)$, obține ecuația echivalentă

$(x-3)^{\log_6(x^2+11)} = (x-3)^2$..1p

Găsește $\log_6(x^2+11) = 2$ *sau* $x - 3 = 1$, de unde obține $x \in \{4{,}5\}$, care convin..............1p

c) Pune condițiile de existență: $\begin{cases} lg^2x^2 + 12lgx + 8 > 0 \\ 0{,}01 - x > 0 \\ 0{,}01 - x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$ 1p

$lg^2x^2 + 12lgx + 8 > 0 \Leftrightarrow lg^2x + 3lgx + 2 > 0 \Leftrightarrow lgx \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$.............1p

Finalizare $\begin{cases} x \in \left(-\infty, \frac{1}{100}\right) \cup \left(\frac{1}{10}, \infty\right) \\ x \in \left(-\infty, \frac{1}{100}\right) \\ x \neq -\frac{99}{100} \\ x \in (0, \infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{100}\right)$ 1p

SUBIECTUL 4

Andrei și Bogdan locuiesc pe aceeași stradă liniară în casele A și B de afixe $z_A = 1 - i$ *și* $z_B = -1 + i.$

a) Determinați distanța dintre cele două case.

b) Cezar și Dan vor să-și construiască câte o casă C și D de o parte și de alta a străzii AB astfel încât cele patru case să fie vârfurile unui romb cu latura egală cu distanța dintre casele lui Andrei și Bogdan. Determinați afixele punctelor C și D.

c) *Determinați numărul real m știind că Marian are un magazin M de afix* $z_M = 5 + mi$ *pe strada pe care locuiesc Andrei și Bogdan astfel încât casa lui Andrei să fie situată între casa lui Bogdan și magazin (M-A-B coliniare).*

SOLUȚIE:

a) $AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{2}$..........1p

b) $\Delta ABC\ echilateral \Longrightarrow |z_B - z_A| = |z_A - z_C| = |z_B - z_C|$ unde C are afixul

$z_c = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ 1p

Deduce $(a-1)^2 + (b+1)^2 = (a+1)^2 + (b-1)^2 = 8$..........1p

Obține $a = b$ și $a = \pm\sqrt{3}$ și găsește punctele C și D de afixe $z_C = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$ și

$z_D = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$..........1p

c) Deoarece $A \in (MB) \Rightarrow \frac{z_M - z_B}{z_A - z_B} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{6+(m-1)i}{2-2i} \in \mathbb{R}$..........1p

Obține $\frac{7-m}{4} + \frac{m+5}{4}i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = -5$..........2p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a XI –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *și* $M_a = I_2 + aA$, *unde* a *este număr real.*

a) Arătați că $5M_3 - 4M_{-1} = M_{19}$.
b) Determinați valorile reale ale lui a *pentru care matricea* M_a *este inversabilă.*
c) Determinați valorile reale ale lui a *pentru care* $M_a \cdot M_a = M_0$.

Soluție:

a) $5M_3 - 4M_{-1} = 5(I_2 + 3A) - 4(I_2 - A)$ 1p

$= 5I_2 + 15A - 4I_2 + 4A = I_2 + 19A = M_{19}$ 1p

b) $M_a = \begin{pmatrix} 1-3a & 3a \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M_a) = (1-3a)(1+a) + 3a^2 = 1 - 2a$ 1p

Matricea M_a este inversabilă $\Leftrightarrow \det(M_a) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ 1p

c) $M_a \cdot M_b = I_2 + aA + bA + abA^2, A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -2A$ 1p

$\Rightarrow M_a \cdot M_b = M_{a+b-2ab}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, deci $M_a \cdot M_a = M_0 \Leftrightarrow M_{2a-2a^2} = M_0 \Leftrightarrow$ 1p

$\Leftrightarrow 2a - 2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ sau $a = 1$ 1p

Subiectul 2.

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ *și* $g(x) = x^3 + x^2 + 2x$.

a) Arătați că numărul $C = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+f(x)} - \sqrt{f(x)}}{x}$ *este rațional.*
b) Să se determine abscisa pozitivă a punctului de pe graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)$, *în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta* d *de ecuație* $y = 5x + 1$.
c) Demonstrați că ecuația $g(x) = f(x) + 3$ *are o soluție reală unică aflată în intervalul* $(1,2)$.

Soluţie:

a) $C = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ 1p

b) $h(x) = g(x) - f(x) = x^3 + 2x - 1$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$ deoarece conţine operaţii cu funcții elementare, deci derivabile şi va admite tangentă în orice punct de pe graficul său..1p

Tangenta la graficul lui h în $x = x_0$ are ecuaţia: $y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0)$ şi panta $m_1 = h'(x_0)$ 1p

Dreapta d, de ecuaţie $y = 5x + 1$, are panta $m_2 = 5$, iar tangenta şi d sunt paralele dacă $m_1 = m_2$ 1p

Din $h'(x) = 3x^2 + 2$ şi $m_1 = m_2 \Rightarrow 3{x_0}^2 + 2 = 5 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$, convine $x_0 = 1$ 1p

c) Considerăm funcția $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = g(x) - f(x) - 3 \Rightarrow f_1(x) = x^3 + 2x - 4$.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow R = \frac{f_1(x_1) - f_1(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{{x_1}^3 - {x_2}^3 + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)\cdot(x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2) + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$

$\Rightarrow R = \frac{(x_1 - x_2)\cdot(x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2} = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + 2 > 0 \Rightarrow f_1$ este strict crescătoare (sau orice altă metodă de a arăta monotonia funcției f_1) 1p

Remarcând și faptul că f_1 este continuă pe $\mathbb{R}$, iar $f_1(1) = -1 < 0$ și $f_1(2) = 8 > 0 \Rightarrow$există un singur $x_0 \in (1,2)$, astfel încât $f_1(x_0) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat 1p

Subiectul 3.

Prețul de vânzare (măsurat în bitcoin) al unor acțiuni a fost urmărit începând de la momentul 1 *(când au fost plasate pe piață la bursa de la New York) până la momentul T (când s-au epuizat). Prețul maxim de vânzare a fost atins la momentul* t_0. *Prețul acțiunilor a înregistrat o variație dată de funcția*

$P: [1;T] \to (0,3]$, $P(t) = \begin{cases} 2^t - 1, & 1 \le t \le t_0 \\ 4 - \sqrt{t-a}, & t_0 < t \le T \end{cases}$ *unde* $a \in \mathbb{R}$, *t este timpul de tranzacționare măsurat în ore iar* t_0 *este momentul la care prețul de vânzare atinge pragul maxim de* 3 *bitcoin.*

a) Găsiți t_0.

b) Să se găsească $a \in \mathbb{R}$ *știind că în prețul tranzacționării acțiunilor nu s-a observat nici un moment de discontinuitate.*

c) Pentru $a = 1$, *aflați T știind că prețul ultimei acțiuni a fost egal cu prețul de la momentul plasării pe piață.*

Soluție

a) $P(t_0) = 3 \Leftrightarrow 2^{t_0} - 1 = 3 \Leftrightarrow 2^{t_0} = 4 \Leftrightarrow t_0 = 2$ 2p

b) Funcția *P* nu are discontinuități, deci *P* este continuă inclusiv în $t_0 = 2$, adică vom avea 1p

$\lim\limits_{\substack{t\to2\\t<2}} P(t) = \lim\limits_{\substack{t\to2\\t>2}} P(t) = P(2) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{t\to2\\t<2}}(2^t - 1) = \lim\limits_{\substack{t\to2\\t>2}}\left(4 - \sqrt{t-a}\right) = 2^2 - 1 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{2-a} = 3$ 1p

Obținem $\sqrt{2-a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$ 1p

c) La momentul epuizării pachetului $P(T) = P(1) = 2^1 - 1 = 1$ 1p

Vom avea deci $4 - \sqrt{T-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{T-1} = 3 \Leftrightarrow T - 1 = 9 \Leftrightarrow T = 10$ 1p

Subiectul 4.

O firmă de construcții realizează planul unei autostrăzi între localitățile A și B cu coordonatele (20, 30) , respectiv (60,110) unde 1 u.m. pe schița cadastrală reprezintă 1 km real. Autostrada va asigura drumul cel mai scurt între cele două localități și va traversa o zonă cu pădure.

a) Să demonstreze că localitatea M , cu coordonatele (30, 50) se află pe traseul de construcție al viitoarei autostrăzi.

b) Știind că zona împădurită este situată de o parte și de alta a autostrăzii și este delimitată de punctele M , N (a, 70) și P (50, 60) pe schița cadastrală, aflați parametrul real a știind că suprafața pădurii este de 250 km^2.

Soluție:

a) *M* se află pe traseul autostrăzii $\Leftrightarrow A, M, B$ coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$..2p

Obținem $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 30 & 1 \\ 30 & 50 & 1 \\ 60 & 110 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci localitatea M se află pe traseul autostrăzii.....................1p

b) Suprafața pădurii este dată de aria triunghiului *MNP* 1p

Avem $D_{MNP} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 30 & 50 & 1 \\ a & 70 & 1 \\ 50 & 60 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (10a - 700)$; $Aria_{MNP} = |D_{MNP}| = 250$........1p

$\Leftrightarrow |10a - 700| = 500 \Leftrightarrow a = 120$ sau $a = 20$ 1p

Convine doar soluția $a = 20$, deoarece, pentru $a = 120$, pădurea s-ar afla doar de o parte a autostrăzii 1p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană, Iași
08.03.2025
Clasa a XII-a filieră tehnologică – secțiunea H1
Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Fie $A=\begin{pmatrix}7 & 5\\ -7 & -5\end{pmatrix}$ *și mulțimea* $G=\left\{X(a)=I_2+aA, \text{unde } a\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right\}$

a) *Demonstrați că* $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+2ab),\ \forall X(a),X(b)\in G$;

b) *Admitem că* $(G,\cdot)$ *este grup abelian. Aflați numărul real m astfel încât funcția* $f:(\mathbb{R}^*,\cdot)\to(G,\cdot), f(x)=X(\frac{x+m}{2})$ *este izomorfism de grupuri;*

c) *Câte perechi de numere întregi de forma (a,b) există, astfel încât* $X(a)X(b)=X(5)$?

Soluție:

a) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2^2+bI_2A+aAI_2+abA^2$

$A^2=\begin{pmatrix}14 & 10\\ -14 & -10\end{pmatrix}=2A$ 1p

$X(a)X(b)=I_2+bA+aA+2abA=I_2+(a+b+2ab)A=X(a+b+2ab)$.......... 1p

b) Dacă f este izomorfism atunci $f(e_1)=e_2$, unde $e_1=1$ este elementul neutru din grupul $(\mathbb{R}^*,\cdot)$..1p

iar $e_2=X(0)$ este elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$ 1p

$f(1)=X(0),\ f(1)=X\left(\frac{1+m}{2}\right)\Rightarrow \frac{1+m}{2}=0\Rightarrow m=-1$ 1p

c) $X(a)X(b)=X(5)\Rightarrow a+b+2ab=5$

$2\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=5\Rightarrow (2a+1)(2b+1)=11$ 1p

$2a+1, 2b+1$ sunt divizori întregi ai lui 11

$(a,b)\in\{(0,5);\ (5,0);\ (-1,-6);\ (-6,-1)\}\Rightarrow$ 4 perechi. 1p

Subiectul 2

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ *se definesc legile de compoziție* $x\circ y=x+y+\hat{3}$ *și* $x*y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y$.

a) *Să se demonstreze distributivitatea legii de compoziție “$*$” față de legea de compoziție “$\circ$”.*

b) Să se verifice dacă tripletul $(\mathbb{Z}_6,\circ,*)$ este inel comutativ.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuații $\begin{cases}x*\hat{2}=\hat{2}y+\hat{3}\\ x\circ y=\hat{5}\end{cases}$.

Soluție:

a) $x*(y\circ z)=xy+xz+\hat{3}y+\hat{3}z+3$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}_6$

$(x*y)\circ(x*z)=xy+xz+\hat{3}y+\hat{3}z+3$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}_6$ 1p

$x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}_6\Rightarrow$ legea “$*$” este distributivă în raport cu legea de compoziție “$\circ$” 1p

b) $(\mathbb{Z}_6,\circ)$ grup comutativ cu elementul neutru $e_1=\hat{3}$ și $\forall x\in\mathbb{Z}_6$ este simetrizabil, unde

$x' = -x \in \mathbb{Z}_6$ 1p

$\left(\mathbb{Z}_6 \setminus \{\hat{3}\},*\right)$ este monoid comutativ cu elementul neutru $e_2 = \hat{4}$ 1p

Având în vedere și proprietatea de distributivitate demonstrată la **a)**

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_6,\circ,*)$ este inel comutativ 1p

c) $\begin{cases} x * \hat{2} = \hat{2}y + \hat{3} \\ x \circ y = \hat{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{5}x = \hat{2}y + \hat{3} \\ x + y + \hat{3} = \hat{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{5}x = \hat{2}y + \hat{3} \\ x = \hat{2} + \hat{5}y \end{cases}$ 1p

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{4} + y = \hat{2}y + \hat{3} \\ x = \hat{2} + \hat{5}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \hat{1} \\ x = \hat{1} \end{cases}$ 1p

Subiectul 3

Se consideră $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$ *, pentru* $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) *Să se calculeze* I_1 *;*

b) *Să se arate că* $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$ *,* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$*;*

c) *Să se demonstreze că* $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$ *,* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *.*

Soluție:

a) $I_1 = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{1}{6}$ 1p

b) $I_n = \int_0^1 (x)' \cdot (x - x^2)^n dx = -n \int_0^1 (x - 2x^2)(x - x^2)^{n-1}\, dx =$ 1p

$= -n \int_0^1 (2x - 2x^2 - x)(x - x^2)^n\, dx = -2nI_n + \frac{n}{2} \int_0^1 2x \cdot (x - x^2)^{n-1} dx =$ 1p

$= -2nI_n - \frac{n}{2} \int_0^1 (x - x^2)'(x - x^2)^{n-1} dx + \frac{n}{2} \int_0^1 (x - x^2)^{n-1} dx =$

$= -2nI_n + \frac{n}{2} I_{n-1} - \frac{n}{2} \int_0^0 t^{n-1} dt = -2nI_n + \frac{n}{2} I_{n-1}$ 1p

$(2n + 1)I_n = \frac{n}{2} I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$ 1p

c) Fie funcția de gradul al doilea $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$

$x_V = \frac{1}{2}$ punctul de maxim al funcției f și $y_V = \frac{1}{4}$ maximul funcției pe intervalul [0,1]

$f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$

Pentru $\forall x \in [0,1]$ avem $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq (x - x^2)^n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p

$\Rightarrow 0(1 - 0) \leq \int_0^1 (x - x^2)^n\, dx \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (1 - 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

din aplicarea proprietății de medie a integralei definite 1p

Subiectul 4

În urma unui studiu referitor la memoria elevilor, s-a constatat că numărul de cuvinte noi din vocabularul limbii franceze memorate de un elev în t *minute de la începerea unei ore de clasă este dat de* $[M(t)]$, *partea întreagă a lui* $M(t)$, *unde* $M(t) = |f(t)|$, *iar* $f: [0,50] \to \mathbb{R}$ *este o funcție derivabilă care verifică pentru orice* $t \in [0,50]$ *relația* $f'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}16t$.

a) *Aflați funcția* f *și numărul de cuvinte memorate de un elev în primele* 10 *minute ale unei ore de limba franceză.*

b) *Demonstrați că numărul de cuvinte noi memorate de un elev crește pe parcursul unei ore de clasă și determinați câte cuvinte noi memorează un elev în ultimele* 20 minute *dintr-o oră de clasă, cu durata de* 50 minute.

Soluție:

a) $\int f'(t)dt = \int \left(\frac{3}{1000}t^2 - \frac{16}{100}t\right)dt = \frac{1}{1000}t^3 - \frac{8}{100}t^2 + C$ 1p

Știind că $\int f'(t)dt = f(t) + C \Rightarrow f(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}08t^2 + C$ 1p

Deoarece vorbim doar despre cuvintele noi, atunci avem $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ 1p

Numărul căutat este $[M(10)] = 7$ 1p

b) Se observă că:

$f(t) = 0{,}001t^2 \cdot (t - 80) \le 0, \forall t \in [0,50]$ și

$f'(t) = 0{,}001t \cdot (3t - 160) < 0, \forall t \in (0,50]$ 1p

Deci $M(t) = -f(t)$ și $M'(t) = -f'(t) > 0, \forall t \in (0,50]$

Se obține astfel că M - funcție strict crescătoare și $[M]$ – funcție crescătoare pe $[0,50]$ …... 1p

Deoarece

$M(50) = \left|\frac{1}{1000} \cdot 50^3 - \frac{8}{100} \cdot 50^2\right| = 75$ și

$M(30) = \left|\frac{1}{1000} \cdot 30^3 - \frac{8}{100} \cdot 30^2\right| = 45$,

numărul căutat este $M(50) - M(30) = 75 - 45 = 30$ 1p