

Examenul național de bacalaureat 2025 – simulare județeană

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\lg(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) - 1 = 3\lg 2 + 2\lg 3$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 2x - 3$, unde m este un număr real și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$. Dacă M este punctul în care graficul funcției g intersectează axa Ox , atunci determinați numărul real m astfel încât punctul M să aparțină și graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 3.
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC , $\alpha \in (0, +\infty)$, punctele M , N și P astfel încât $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC} = \alpha \overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CA} = \alpha \overrightarrow{CP}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.
- 5p 6. Arătați că $\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{3} = 0$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m+1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (m+1)x - 2y + z = m \\ -2x + y + (m+1)z = 3m+3 \\ x + (m+1)y - 2z = 2m-3 \end{cases}$, unde m este un număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că $A(m)$ este inversabilă dacă și numai dacă $m \neq 0$.
- 5p c) Pentru $m \neq 0$, demonstrați că singura soluție a sistemului de ecuații este $x = 1$, $y = 2$ și $z = 3$.
2. Pe mulțimea $M = [-1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p a) Verificați dacă $x * y = (x+1)(y+1) - 1$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p b) Dacă $x \in M$ și $x \neq -1$, atunci demonstrați că există $x' \in M$ și $x \neq -1$, astfel încât $x * x' = 0$.
- 5p c) Determinați $x \in M$ pentru care $x * x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$.
- 5p a) Verificați dacă $f'(x) = \ln \frac{1-x}{x}$, oricare ar fi $x \in (0,1)$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$.

- 5p** c) Dacă $a, b \in (0, 1)$ și $a + b = 1$, atunci demonstrați că $a \ln a + b \ln b \geq \ln \frac{1}{2}$.
2. Pentru orice număr natural nenul n , se consideră funcția $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \sqrt{x+1}$, iar șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, este definit prin $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f_2(x)}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{1}{3}$.
- 5p** b) Arătați că $I_1 = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}$.
- 5p** c) Demonstrați că $(2n+3)I_n + 2nI_{n-1} = 4\sqrt{2}$, pentru orice număr natural nenul n .